ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών Παν.Πατρών

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2008

ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ: Uni Student

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών Παν.Πατρών

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Τα παρακάτω αποτελούν σημειώσεις του μαθήματος "Φυσική ΙΙ" του τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών. Οι σημειώσεις περιέχουν λυμένες ασκήσεις Ηλεκτρομαγνητισμού από τις παραδόσεις του μαθήματος.

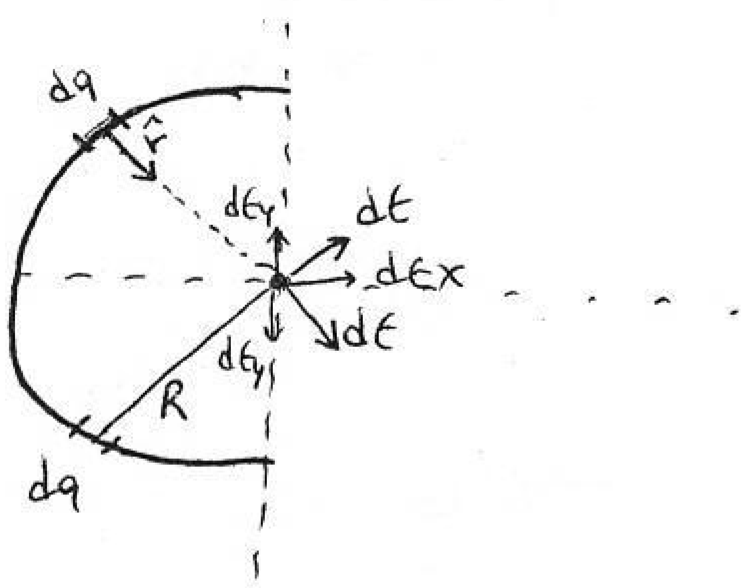
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ: Uni Student

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Φορτίο ομοιόμορφα κατανεμημένο σε ημικύκλιο. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο του. ($\lambda = +Q/L$)

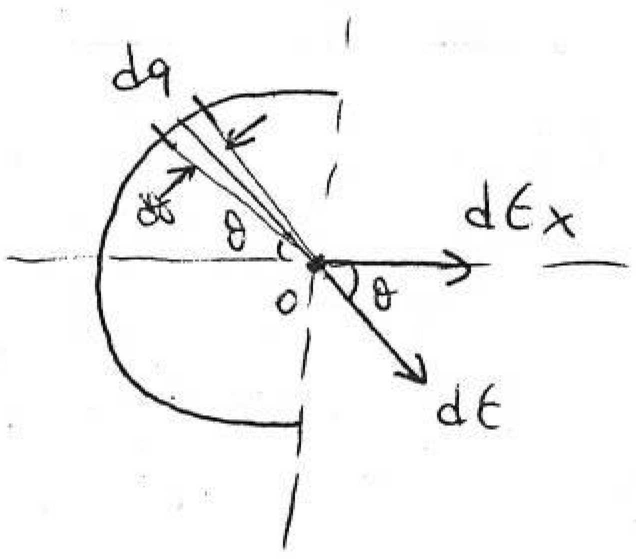
Λύση



Θεωρώ στοιχειώδη φορτία.

$$d\vec{E} = \frac{k\cdot dq}{r^2}\,\hat{r}$$

Για κάθε στοιχειώδες dq στο πάνω ημισφαίριο, υπάρχει και ένα συμμετρικό στο κάτω ημισφαίριο, άρα αν αναλύσω τα $\vec{E}$ σε E_x και $\vec{E_y}$, στον y άξονα αλληλοεξουδετερώνονται.



$$d\theta = \frac{dl}{R} = \frac{dq}{R\cdot\lambda}$$

έχω $\lambda = \frac{dq}{dl} \Leftrightarrow dl = \frac{dq}{\lambda}$

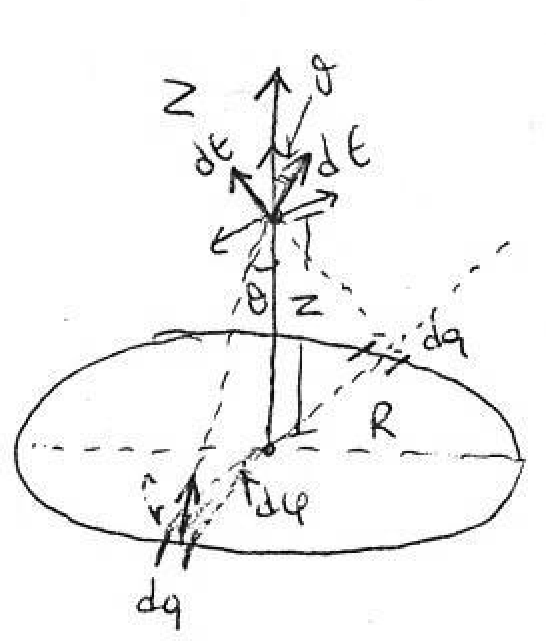
έχω $dl = R\cdot d\theta$, άρα $dq = \lambda\cdot dl$

$$dE_x = dE\cdot\cos\theta = k\frac{dq}{R^2}\cdot\cos\theta = \frac{k\cdot\lambda\cdot\cancel{R}\cdot d\theta}{R^{\cancel{2}}}\cdot\cos\theta = \frac{k\cdot\lambda\cdot d\theta}{R}\cdot\cos\theta$$

άρα $\int dE_x = \int_{3\pi/2}^{\pi/2}\frac{k\lambda\cos\theta}{R}\,d\theta \Leftrightarrow E = \frac{k\lambda}{R}\left[\sin\theta\right]_{3\pi/2}^{\pi/2}$

(SOS)

2)



Φορτίο κατανεμημένο στον κυκλικό δίσκο. Να βρεθεί ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα z. (δακτύλιος δηλαδή)

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

Λύση

$$dE = k\frac{dq}{z^2+R^2}\,\hat{r}$$

Έχω συμμετρία, οπότε κάποιες συνιστώσες του dE αλληλοαναιρούνται.

$$d\vec{E_z} = k\frac{dq}{z^2+R^2}\cos\theta\cdot\hat{r}$$

Έχω $\lambda = \frac{dq}{dl} \Leftrightarrow dq = \lambda\cdot dl = \lambda\cdot R\cdot d\varphi$ ...

Έχω: $\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$

$$\int dE = \int_0^{2\pi} k\frac{dq}{z^2+R^2}\cdot\cos\theta$$

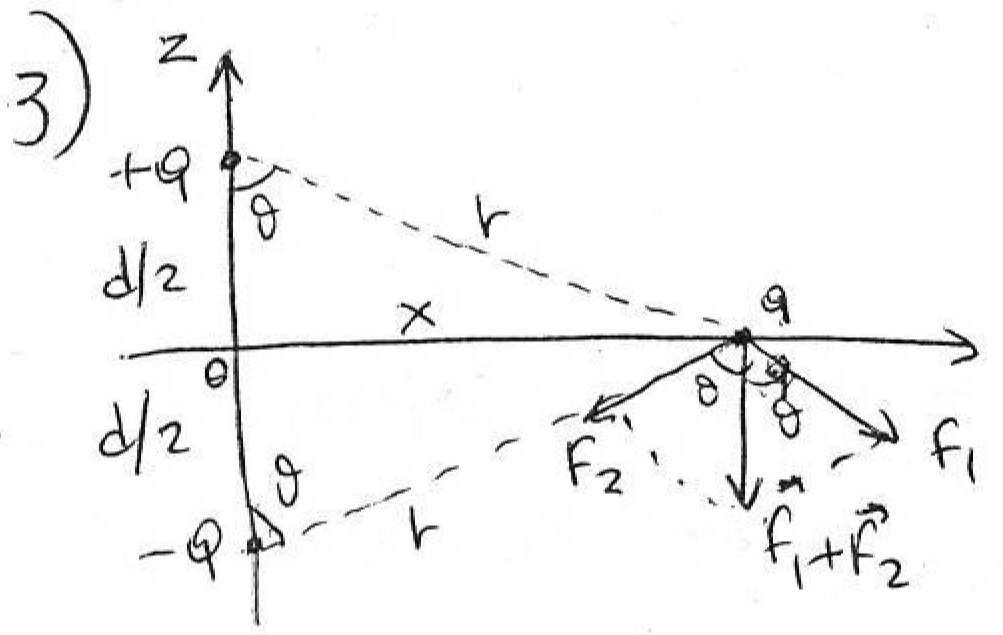
$$\Leftrightarrow E = \int_0^{2\pi}\frac{k\cdot\lambda\cdot R\cdot d\varphi}{z^2+R^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\Leftrightarrow E = \int_0^{2\pi}\frac{k\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\cdot d\varphi = \left[\frac{k\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi k\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

(✱) → τέλος διφύλλου

---

3)



Να βρεθεί η $F_{ολ}$. που ασκείται στο q. (δισδιάστατο σχήμα)

Λύση

$$\left.\begin{aligned} F_{1x} &= k\frac{Qq}{r^2}\sin\theta \\ F_{2x} &= k\frac{Qq}{r^2}\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad F_{1x} = -F_{2x} \Rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$F_1 = F_2 = k\frac{q\,Q}{x^2+d^2/4}$$

$$F_z = \frac{-kQqd}{(x^2+d^2/4)^{3/2}}$$

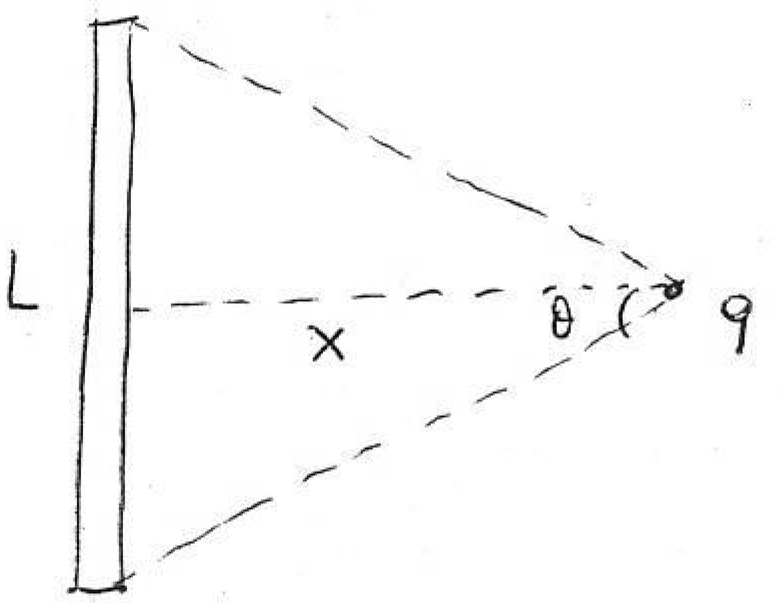
$x\to\infty$, $x >> d$ $(d\to 0)$, τότε $(x^2+d^2/4)^{3/2} \simeq x^3$, άρα:

$\Sigma F_z \simeq \frac{1}{x^3}$ (η F_z αντιστρόφως ανάλογη του x^3)

---

4) Φορτίο ομοιόμορφα κατανεμημένο σε αγωγό μήκους L. F? (2)

Λύση



$$\lambda = \frac{q}{L} \Leftrightarrow \lambda = \frac{dq}{dl}$$

$$F_{ολ.} = 2kqx\lambda \int_0^{L/2} (x^2+z^2)^{-3/2} dz =$$

$$= 2kqx\lambda \int_0^{\theta'} (x^2 + x^2 \tan^2\theta) \cdot \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta$$

$z = x \cdot \tan\theta \Rightarrow dz = \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta$

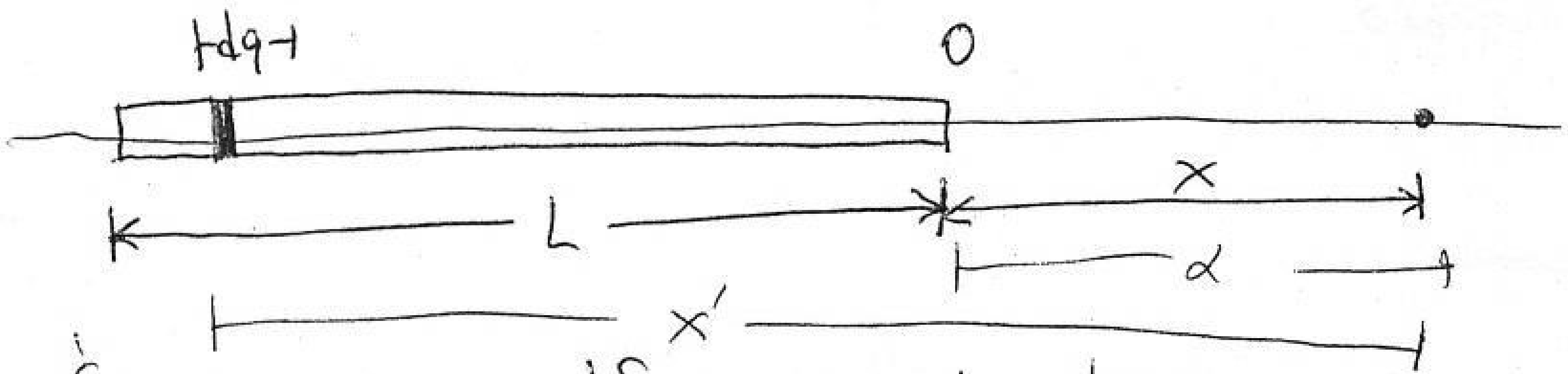
Για $z=0 \rightarrow \tan\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$

Για $z = L/2 \rightarrow L/2 = x \cdot \tan\theta \rightarrow \tan\theta = \frac{L}{2x} \rightarrow \theta' = \ldots$

—

5) Ράβδος ομοιόμορφα φορτισμένη μήκους L με φορτίο $+Q$. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα x της ράβδου.

Λύση



Έστω στοιχειώδες φορτίο dq.

$dq = \lambda \cdot du$

$E = \frac{F}{q} = k\frac{q}{r^2}\hat{r}$

$$dE = k\frac{dq}{(x+u)^2} \Rightarrow dE = \frac{k\lambda du}{(x+u)^2}$$

$$E_{ολ.} = \int dE = \int_{-L}^{0} \frac{k\lambda}{(x+u)^2} du = k\lambda \int_{-L}^{0} (x+u)^{-2} du = k\lambda \left[\frac{-1}{x+u}\right]_{-L}^{0}$$

β' τρόπος

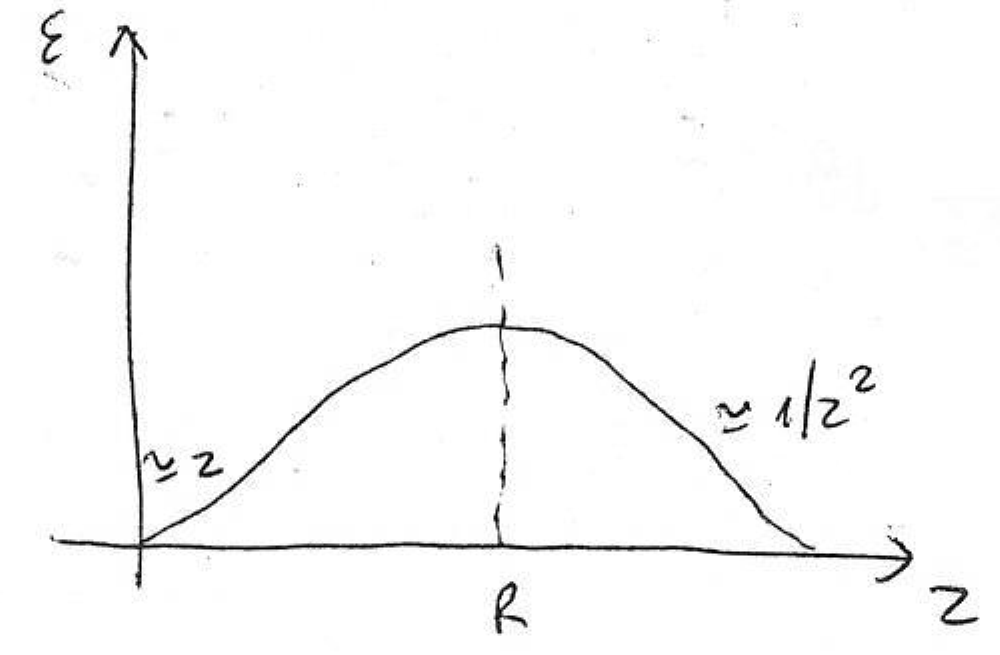
$$\int_\alpha^{\alpha+L} dE = \int_\alpha^{\alpha+L} k\frac{\lambda dx}{x^2} \Leftrightarrow E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\alpha^{\alpha+L}$$

—

(✱) Για $z>>R$, έχω $E_z \simeq 1/z^2$ όπως του σημειακού φορτίου.

Εάν $z=0$, τότε $E_z=0$, άρα το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο του δακτυλίου είναι μηδέν.

Όσο απομακρυνόμαστε από το δακτύλιο, $E\uparrow$.



$z>>R$

$$\frac{2\pi k\lambda zR}{(z^2+R^2)^{3/2}} \simeq \frac{2\pi k\lambda z}{z^{2\cdot 3/2}} = \frac{2\pi k\lambda}{z^2}$$

Για πολύ μικρά z έχω ευθεία στη γραφική παράσταση

$$E = \frac{kQR}{z^{3/2}R^3} = \frac{kQ}{z^{3/2}R^2}$$

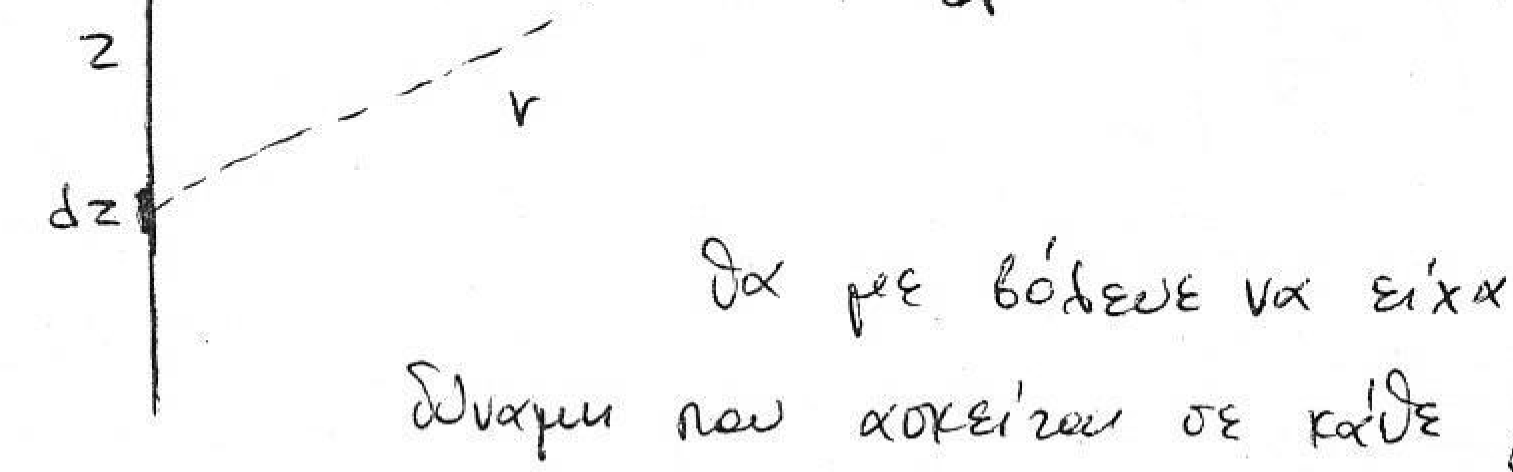
Μοιάζει με το νόμο του Coulomb (ανάλογο του $1/z^2$).

Για $z>>R$, ο δακτύλιος θεωρείται σημείο.

---

6) Φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε ευθεία μακριά γραμμή με κατανομή λ Coulomb/m. Να βρεθεί η συνολική δύναμη που ασκείται στο q.

Λύση



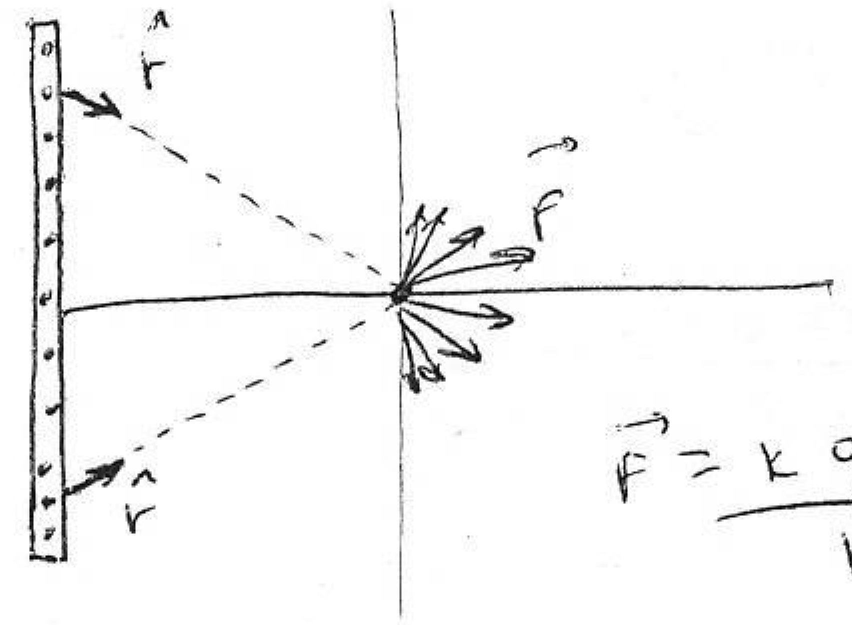
$\lambda = \frac{dq}{dz}$ (γραμμική πυκνότητα φορτίου)

$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{dq}{dz} \Rightarrow dq = \lambda \cdot dz$

$z = x\cdot\tan\vartheta$, $dz = x\cdot\sec^2\vartheta\, d\vartheta$ $\{x=\text{σταθ.}\}$

$\sec\vartheta = \frac{1}{\cos\vartheta} = \frac{r}{x} \Rightarrow r = x\cdot\sec\vartheta$

Θα με βόλευε να είχα σημειακά φορτία και να βρίσκω τη δύναμη που ασκείται σε κάθε ζεύγος q-q'.

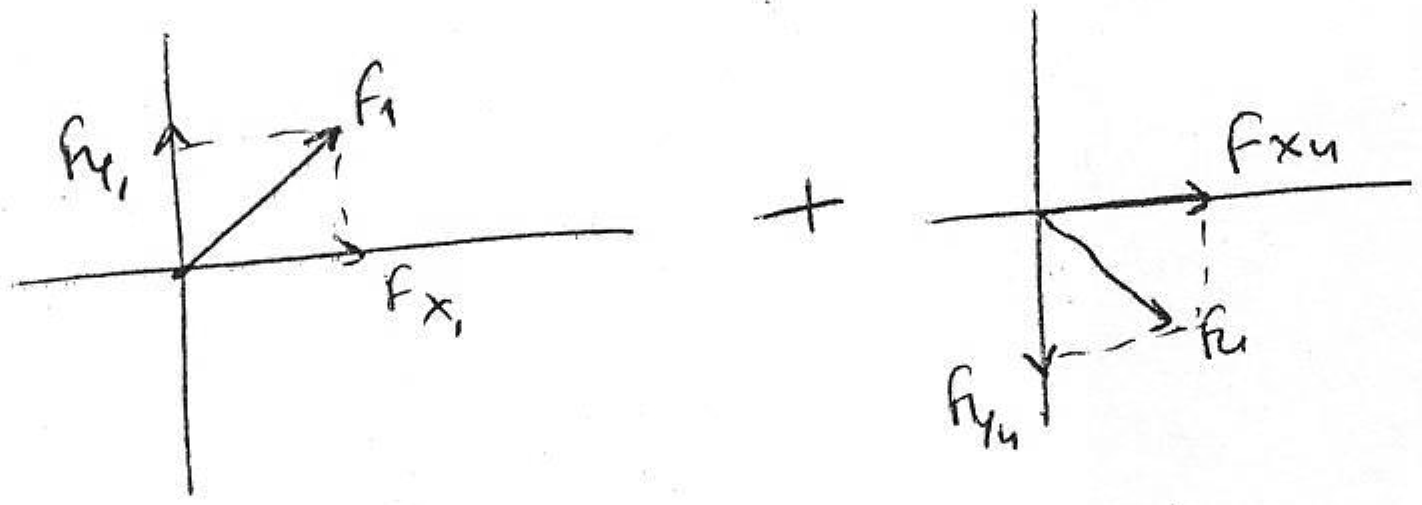


$$\vec{f} = \frac{k q' q \hat{r}}{r^2}$$

Παρατηρήσεις: Οι δυνάμεις f ως προς τον άξονα x συμμετρικές $\left\{ \begin{matrix} \text{όσες πάνω} \\ \text{τόσες και} \\ \text{κάτω} \end{matrix} \right\}$.

Οι προβολές των δυνάμεων στον άξονα y έχουν άθροισμα 0, αφού όσες είναι πάνω είναι και κάτω.

α)



$\Rightarrow f_{y_1} - f_{y_4} = 0$

Παίρνω τις προβολές στον άξονα x (τις αθροίζω).

$2\cdot\sum_{0}^{\infty} f_i^x \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{f}$ ή $2\cdot\int_{0}^{\infty} d\vec{f}$ δηλαδή $\int_{0}^{-\infty} d\vec{f}$ και $\int_{0}^{+\infty} d\vec{f}$ που είναι ίσα λόγω συμμετρίας.

$df_x = \overset{df}{\frac{k q\, dq'}{r^2}} \cos\theta$ (προβολή της f στο x → $f\cdot\cos\theta$) $= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot\lambda\cdot\cos\theta\cdot dz}{r^2}$

$$\int \frac{k q\, dq}{r^2}\cos\theta = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\lambda\cos\theta\, dz}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\lambda}{x}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

άρα $f = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q\lambda}{x}$.

β' τρόπος

$dq = \lambda \cdot dz$, $x = r \cdot \cos\theta$, $\tan\theta = \frac{z}{x}$ $\Rightarrow dz = x \cdot \sec^2\theta \, d\theta$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{kq\,dq}{r^2} \cos\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{kq\lambda dz}{\frac{x^2}{\cos^2\theta}} \cdot \cos\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{kq\lambda dz \cdot \cos^3\theta}{x^2} =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{kq\lambda x \cdot \sec^2\theta \cdot \cos^3\theta}{x^2} d\theta = \frac{kq\lambda}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = \frac{kq\lambda}{x} \left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \dots$$

—

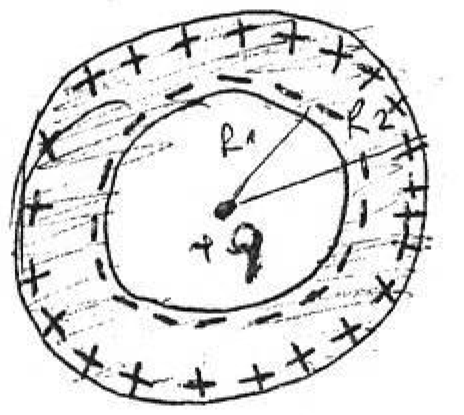
ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (SOS)

17-04-2008

1) Σημειακό φορτίο +q το τοποθετώ στο κέντρο μιας κούφιας σφαίρας, η οποία είναι αγώγιμη. Να βρεθεί το συνολικό φορτίο της σφαίρας, αν αυτή αρχικά είναι αφόρτιστη (το επαγόμενο)

Λύση



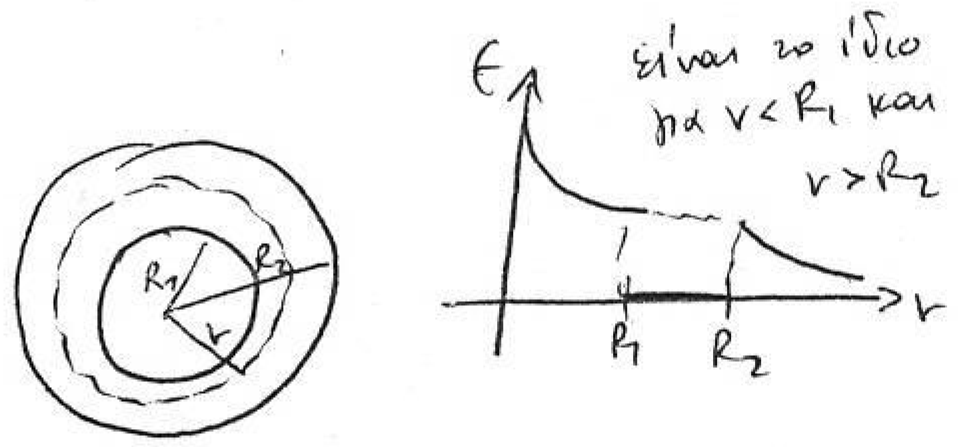
Μέσα στη σφαίρα, το $E=0$ γιατί τα ελεύθερα e εξισορροπούν τα θετικά φορτία (ηλεκτρική ουδετερότητα)

Αφού τοποθετώ +q και στη σφαίρα έχω ελεύθερα e, αυτά έλκονται.

$Q_{εσωτ} + Q_{εξωτ.} = 0 \Leftrightarrow Q_{εσωτ.} = -Q_{εξωτ}$ $\left\{ \begin{array}{l} Q_{εσωτ.} = - \\ Q_{εξωτ.} = + \end{array} \right\}$

Με Gauss υπολογίζω το Q

Παίρνω μια σφαιρική επιφάνεια με $R_1<r<R_2$.



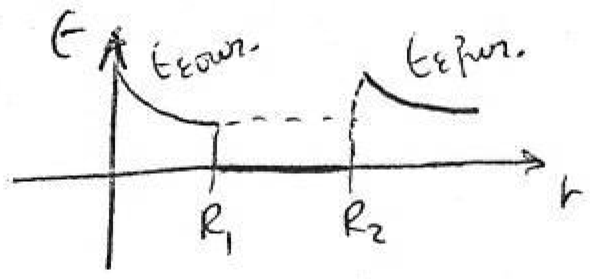
$$\oint E\,ds = \frac{Q_{σημ.} + Q_{εξωτ}}{\varepsilon_0} = 0 \quad αφού \ E=0$$

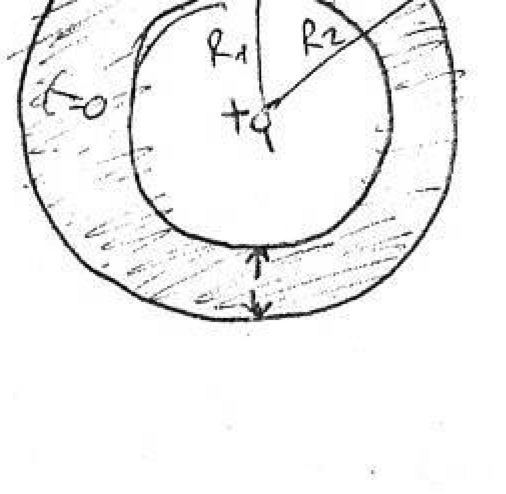
$$\Leftrightarrow \frac{q + Q_{εσ.}}{\varepsilon_0} = 0 \Leftrightarrow \boxed{Q_{εσ.} = -q} \quad \rightarrow \boxed{Q_{εξ} = q}$$

Επαγόμενο φορτίο
όταν βάζω φορτίο, γίνεται ανακατανομή φορτίων, τα οποία μπορώ να υπολογίσω.

2) Σημειακό φορτίο +q το τοποθετώ στο κέντρο μιας κούφιας σφαίρας, η οποία είναι αγώγιμη. Να βρεθεί το επαγόμενο φορτίο, αν αυτή αρχικά είχε φορτίο $Q_{αρχ.}$

Λύση





$$\oint E\,ds = \frac{Q_{ολ.}}{\varepsilon_0}$$

$E_{εσωτ.} = 0$ άρα $\frac{Q_{ολ.}}{\varepsilon_0} = 0 \Leftrightarrow Q_{ολ.} = q + Q_{εσωτ.} = 0$

$Q_{εσωτ} + Q_{εξωτ.} = Q_{αρχικό}$

$\Leftrightarrow \boxed{q = -Q_{εσωτ}}$

$\boxed{Q_{εξ.} = q + Q_{αρχ.}}$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}}$$

Για $r > R_2$

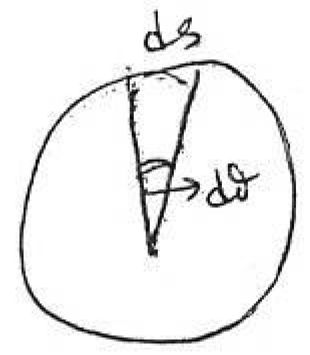
$$\oint E\,ds = \frac{q + q_{\alpha\rho\chi.}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q + Q_{\alpha\rho\chi.}}{r^2}$$

—

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

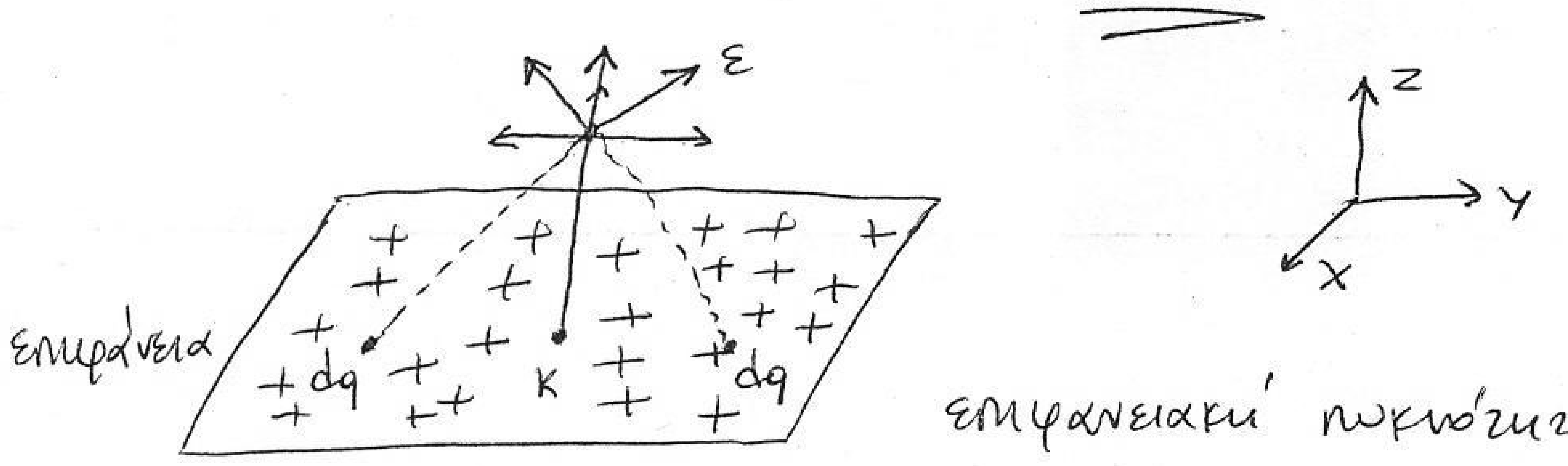
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γενικά: $\oint ds = \int_0^{2\pi} R\,d\theta$ (0 → 2π και όχι ανάποδα, πάω προς εκεί όπου αυξάνεται το dθ)



1) Επίπεδο στο οποίο το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο. Να βρείτε το Ε σε σημείο που απέχει απόσταση z από το γεωμετρικό κέντρο του επιπέδου.

Λύση



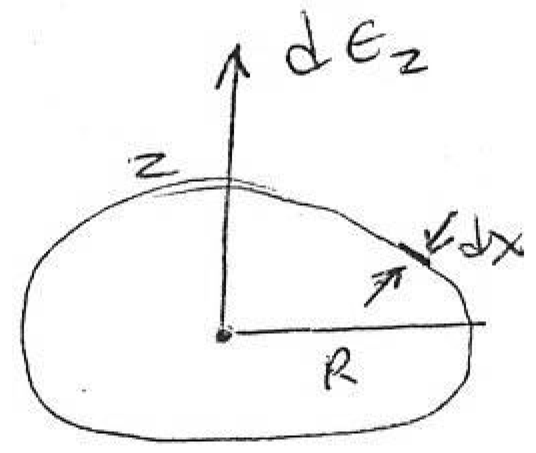
επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = Q/S = dq/ds$

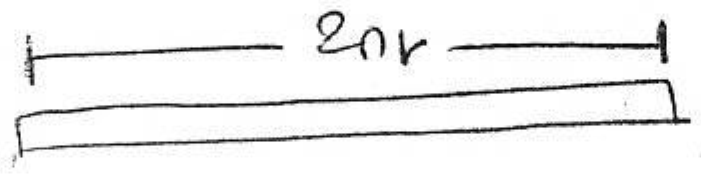
Θεωρώ στοιχειώδες φορτίο dq. Λόγω συμμετρίας, οι εντάσεις στον y αλληλοεξουδετερώνονται.

Παρατηρούμε ότι η ένταση του πεδίου βρίσκεται πάνω στον άξονα z, καθώς στον άξονα των y, οι συνιστώσες των εντάσεων αλληλοεξουδετερώνονται.

$$E = k\frac{dq}{r^2}$$

Θεωρώ ότι η πλάκα αποτελείται από ομόκεντρους άπειρους δίσκους πάχους dx και μήκους 2πR και θα αθροίσω τις εντάσεις τους.





Χρησιμοποιούμε τον τύπο που είχαμε ως άσκηση με τους δακτυλίους, μόνο που εδώ αντί για q, βάζω dq. Αυτό που αλλάζει είναι η ακτίνα για να γεμίσω όλο το επίπεδο. Η μόνη σταθερά θα είναι το z.

Αθροίζω τα dE των ομόκεντρων κύκλων.

$$dE_z = \frac{kz\,dq}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\sigma = \frac{q}{S} \Rightarrow dq = \sigma \cdot dS \Leftrightarrow dq = \sigma \cdot 2\pi r\,dr$$

$$dE_z = \frac{kz\sigma 2\pi r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

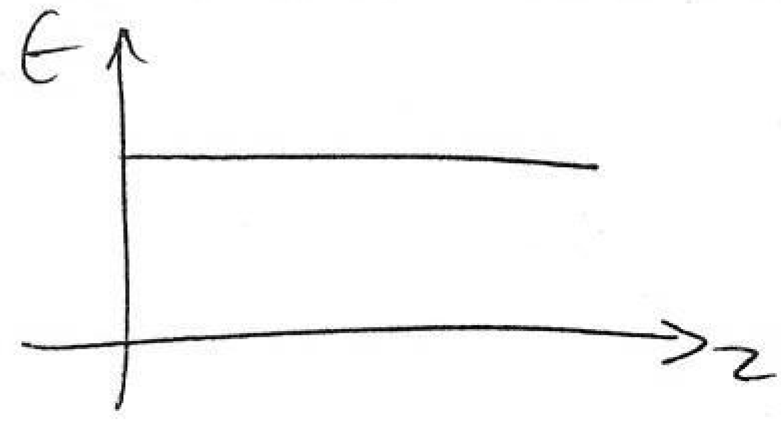
$$E_{ολ} = \int_0^{+\infty} \frac{kz\sigma 2\pi r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}} = kz\sigma 2\pi \int_0^{+\infty} r\,(z^2+r^2)^{-3/2}\,dz$$

$$\Leftrightarrow E_{ολ.} = kz\sigma 2\pi \left[\frac{1}{2}(z^2+r^2)^{-1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{kz\sigma\pi}{2} \cdot \frac{1}{z}$$

$$\Leftrightarrow E_{ολ.} = \frac{2\pi\sigma z k}{z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$\vec{E}_{ολ.} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \hat{z}$, δηλαδή το E είναι ανεξάρτητο του z.

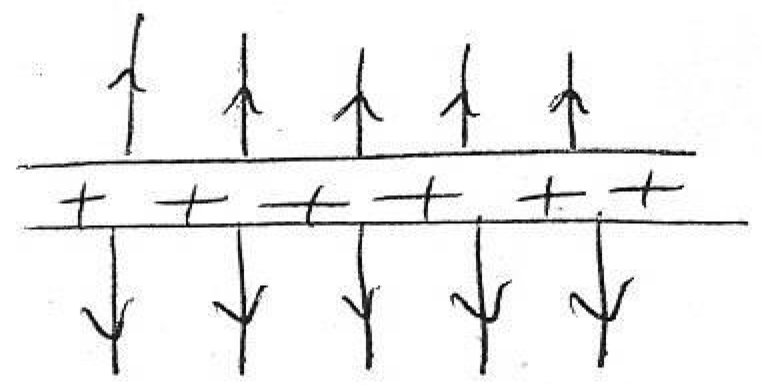
Το ηλεκτρικό πεδίο της πλάκας επομένως είναι ομογενές.



2) Να σχεδιαστούν οι δυναμικές γραμμές της άπειρης επιφάνειας της προηγούμενης άσκησης.

Λύση

πλάκα ομοιόμορφα φορτισμένη



Η πυκνότητα των γραμμών είναι σταθερή.

Γιατί το E είναι ανεξάρτητο του z? $\left(E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)$

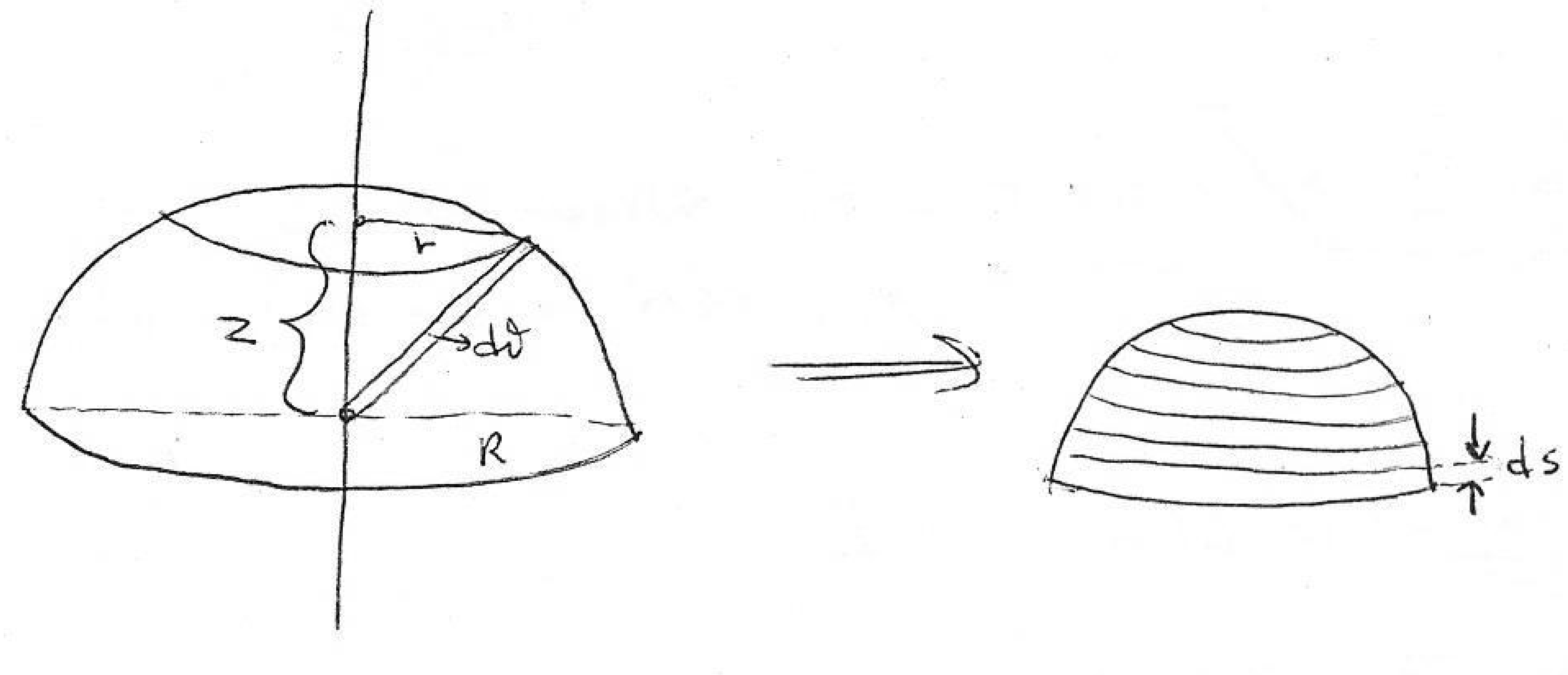
Όσο προχωράω, αυτό που αρχικά θεωρούσα μακριά, τώρα είναι κοντά. Συνεπώς, μπορεί να απομακρύνομαι, αλλά συμπεριλαμβάνω και περισσότερο φορτίο, δηλαδή όταν $z\uparrow$, $q\uparrow$, ενώ όταν $z\downarrow$, $q\downarrow$.
Έτσι, το ένα αναιρεί το άλλο (γραμμικό φαινόμενο) και τελικά το E είναι ανεξάρτητο του z.

3) Ημισφαιρικό κέλυφος (μισή σφαίρα) μικρού πάχους με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma=\frac{+q}{S}$ που είναι ομοιόμορφα φορτισμένο. Να βρεθεί το E στο κέντρο του (Η σφαίρα είναι κούφια).

Λύση

$$\sigma=\frac{+q}{S}=\frac{dq}{dS}=\frac{dq}{2\pi R d\theta}$$

Χωρίζω σε δακτυλίους το κέλυφος.

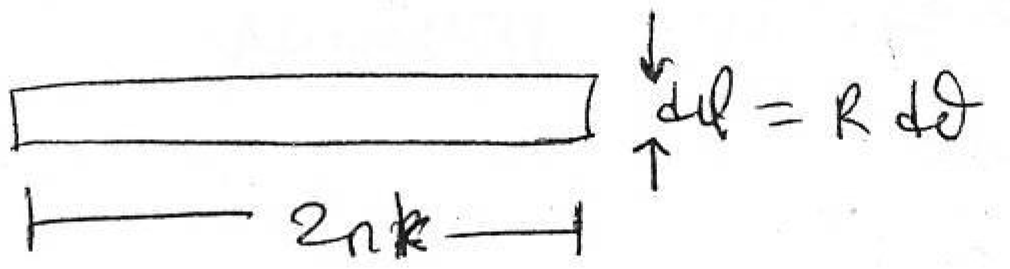


Για ένα δακτύλιο έχω (από προηγ. άσκηση):

$$dE = \frac{k\,dq\,z}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

(δηλ. πρώτα πρέπει να λύσω το δακτύλιο για να βρω τον τύπο και έπειτα αθροίζω).

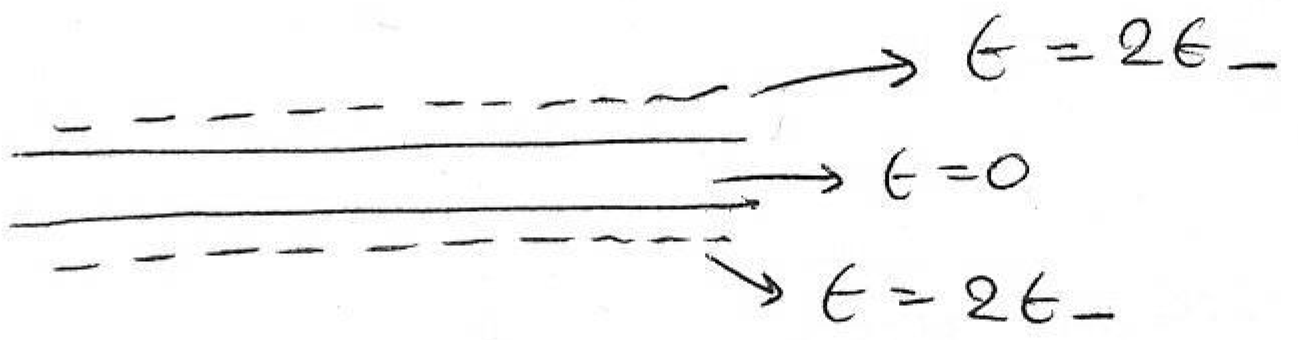
Εδώ, το στοιχειώδες είναι το τόξο



$$dE = \frac{k\,dq\,z}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{kRz\,d\theta}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

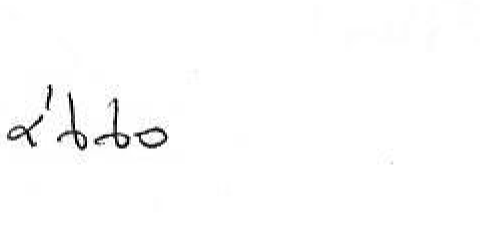
4) Μεταλλικό φύλλο ομοιόμορφα φορτισμένο με $\sigma = \frac{+q}{S}$. Να βρεθεί το E στο χώρο (φύλλο τεραστίων διαστάσεων).

Λύση



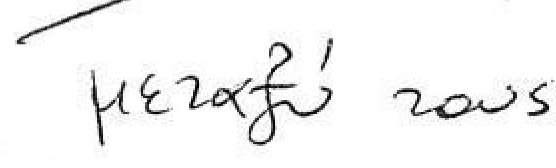
αγώγιμο φύλλο	μονωτικό φύλλο
(περνά το ρεύμα)	μικρή συγκέντρωση ελευθέρων e

$\Longrightarrow$



→ τα e δεν μπορούν να μετακινηθούν

$\Downarrow$



→ τα e μετακινούνται όσο το δυνατό πιο μακριά το ένα από το άλλο

Άρα: στο μεταλλικό φύλλο της άσκησης τα e απομακρύνονται μεταξύ τους και φτάνουν στην περιφέρεια.

5) 2 φύλλα παράλληλα σε απόσταση d απείρου μήκους ομοιόμορφα φορτισμένα. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο (με ίδια επιφανειακή πυκνότητα).

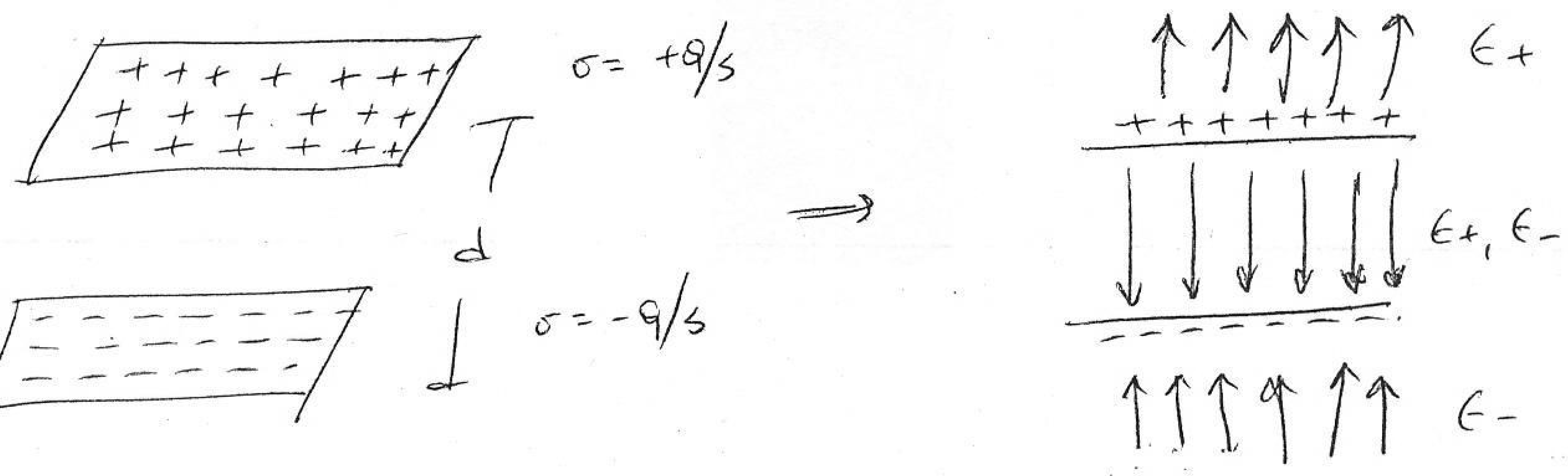
<u>Λύση</u>

Παίρνω κάθε πλάκα χωριστά. Μέσα στις πλάκες τα E_+, E_- είναι ομόρροπα (προς τα κάτω) άρα έχω: $E_{ολ} = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$\Leftrightarrow E_{ολ} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q/A}{\varepsilon_0} = \frac{q}{A \cdot \varepsilon_0}$

Έξω από τις πλάκες, τα διανύσματα είναι αντίρροπα και ίσου μέτρου.

<u>άρα</u> $E_{ολ} = E_+ - E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0$! (λειτουργία ως πυκνωτής)



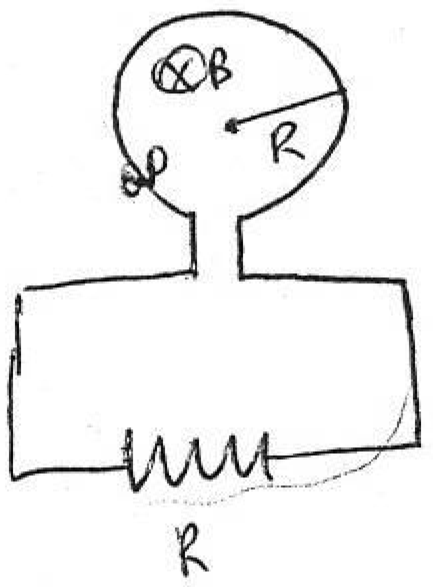
$E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, $E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$E_+ = E_-$ λόγω ίδιου σ.

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (SOS) standard θέμα

1)



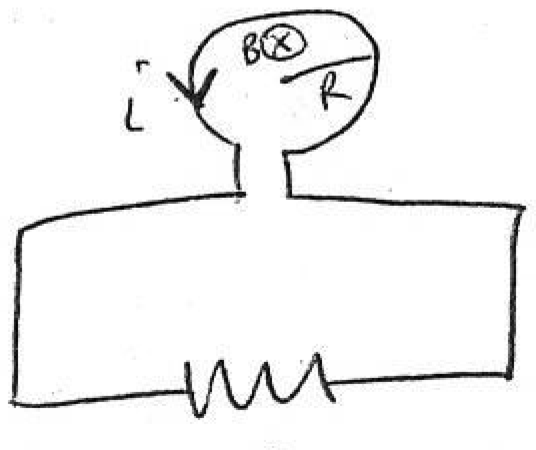
$B = k\cdot t$, $k>0$ (αυξάνω το μαγνητικό πεδίο γραμμικά με το χρόνο)

Ποια η φορά του ρεύματος στο κύκλωμα?

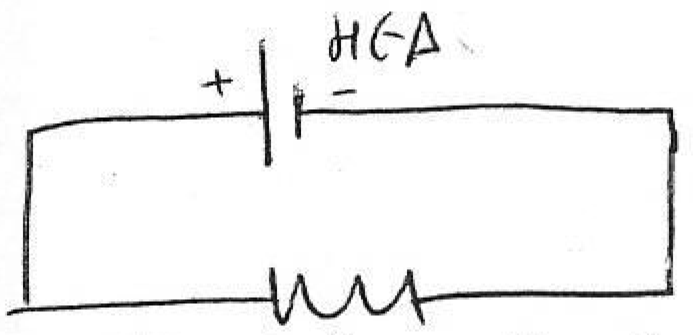
Λύση

Έχω $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$. Κάθε φορά το ρεύμα θα είναι αντίθετα από αυτό που βρίσκω με τον κανόνα του δεξιού χεριού. (νόμος Faraday)

άρα



ισοδύναμο κύκλωμα



$r = R + R_{κυκλ.δίσκου}$

τιμή ρεύματος

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{\oint \Delta\vec{B}\,d\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\Delta B\cdot\pi\cdot R^2}{\Delta t} \Leftrightarrow \mathcal{E} = -k\pi R^2 = i\cdot r \Leftrightarrow i = \frac{k\pi R^2}{r}$$

Γενικά

Βρίσκω με τον κανόνα του δεξιού χεριού (αντίχειρας: B, δάχτυλα: i) τη φορά του ρεύματος ώστε όταν αυξάνεται το B, να συνεισφέρει στην αύξηση του B (αντίστοιχα στη μείωση) και βάζω την ανάποδη φορά.

Δηλαδή: αν το B τείνει να αυξηθεί, η ΗΕΔ θα δημιουργεί ρεύμα που να αντιτίθεται στην αύξηση (αντίθετη μαγνητική ροή)

αν το B τείνει να μειωθεί, η ΗΕΔ θα δημιουργεί ρεύμα που να αντιτίθεται στη μείωση (αντίθετη μαγνητική ροή).

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) 

. Ομογενές εξωτερικό μαγνητικό πεδίο (όχι του αγωγού). Ζητείται η $F_{Laplace}$ στην παράκαμψη του σύρματος.

Λύση

$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$

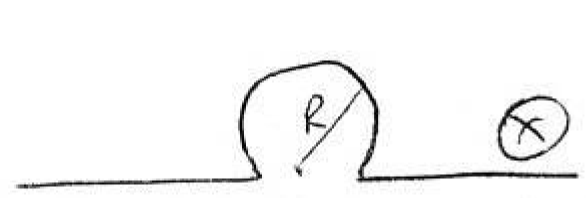
$d\vec{F} = i\,d\vec{l}\times\vec{B} \rightarrow F_{Laplace} = \int_\Gamma^\Delta i\,d\vec{l}\times\vec{B} = \ldots$

{ $B_{εξ} = B_{εξ}\hat{z}$ σταθερό, αφού είναι ομογενές πεδίο

Επειδή $d\vec{l} \perp \vec{B}$ πάντα, έχω ότι:

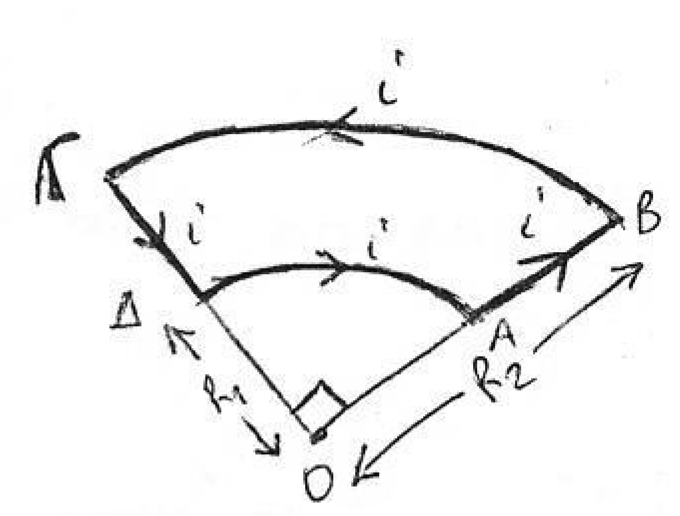
$F_{Laplace} = i\cdot B_{εξ}\int_\Gamma^\Delta d\vec{l}\times\hat{z} = i B_{εξ}\left[\int_\Gamma^\Delta d\vec{l}\right]\times\hat{z} = i B_{εξ}\,\vec{\Gamma\Delta}\times\hat{z}$

$\boxed{F_{Laplace} = i\,\vec{\Gamma\Delta}\times\vec{B}}$ $\xrightarrow{\text{συμπέρασμα}}$ η δύναμη εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση, από πού ξεκινά η παράκαμψη και πού τελειώνει. (δηλαδή είναι ανεξάρτητο του σχήματος της παράκαμψης)

(πχ) αν 

, θα είχα $F_{Laplace} = i\cdot 2\vec{R}\times\vec{B}$.)

Η δύναμη βρίσκεται με κανόνα δεξιού χεριού. Η παλάμη βλέπει προς τα εκεί που είναι το B, τα δάχτυλα δείχνουν το ρεύμα και ο αντίχειρας τη δύναμη $F_{Laplace}$. Είναι ανάλογο του κανόνα τριών δαχτύλων (FBI). Άρα, η δύναμη είναι προς τα πάνω.

2) 

Το σύρμα είναι μόνο το σκούρο. Ζητείται το μαγνητικό πεδίο στο O.

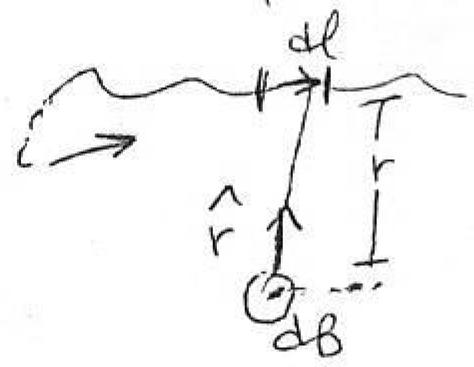
Λύση

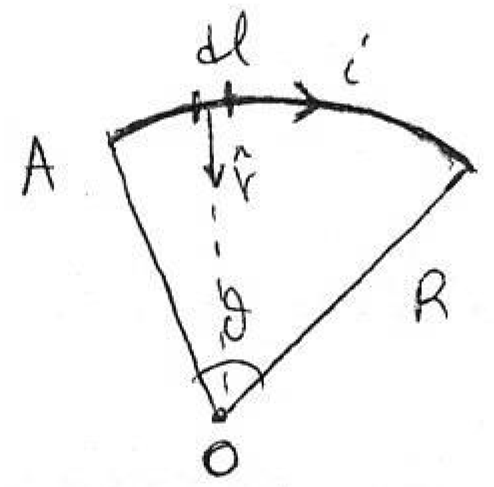
Τα ΑΒ, ΓΔ δε συνεισφέρουν στο μαγνητικό πεδίο του O, γιατί από νόμο Biot-Savart δίνουν 0.

$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{i\,d\vec{l}\times\vec{r}}{r^2}$ (νόμος Biot-Savart)

{ $d\vec{l}$ = στοιχειώδες κομμάτι
$\vec{r}$ = απόσταση του dl από το σημείο που θέλω.

Στα ΑΒ, ΓΔ τα $\vec{dl}, \vec{r}$ είναι συγγραμμικά, άρα $\vec{dl}\times\vec{r}=0$, δηλαδή $B=0$.

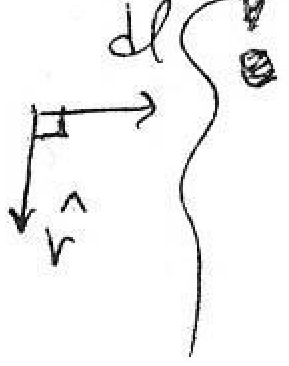




⇝ γενικά για το τόξο $B_{\vec{AB}}$ (στο O)

(AB) : μήκος τόξου

$$B_{\vec{AB}} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r^2} i \int_A^B \vec{dl}\times\hat{r} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi r^2}\int_A^B dl(-\hat{z}) =$$



! το $\hat{r}$ καταλήγει το σημείο που θέλω το μαγνητικό πεδίο.

$$\Leftrightarrow B_{\vec{AB}} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi}\cdot\frac{AB}{r^2}\cdot\hat{z} \quad (O: \otimes^B \rightarrow \text{προς τα μέσα}) \quad (*)$$

! Δε χρησιμοποιούμε τον τύπο $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{i}{r}$ αν και έχουμε σύρμα, γιατί ο τύπος αυτός χρησιμοποιείται για σύρμα ευθύγραμμο και απείρου μήκους.

Πάντα, το μοναδιαίο διάνυσμα ($\hat{r}$) ξεκινά από το σημείο που παράγεται ένα πεδίο (ηλεκτρικό, μαγνητικό) και καταλήγει στο σημείο που ζητάμε την τιμή του πεδίου.

(*) Αν ορίσω $\overset{z}{\odot}\!\rightarrow x$, $\downarrow y$, θα έχω $\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$ με θετική φορά προς τα έξω, αλλά εδώ με κανόνα δεξιού χεριού βγαίνει προς τα μέσα, άρα θα έχω $-z$.

Μπορώ επίσης να γράψω: $\frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi r^2}\int \vec{dl}\times\hat{r} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2}\int \vec{dl} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2}\cdot(AB)$, δηλαδή να βρω μόνο το μέτρο του B και μετά να προσδιορίσω τη φορά με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

δηλαδή τελικά: $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi r^2}(AB) = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi}\cdot\frac{\theta}{r}$ (γενικά για τόξο)

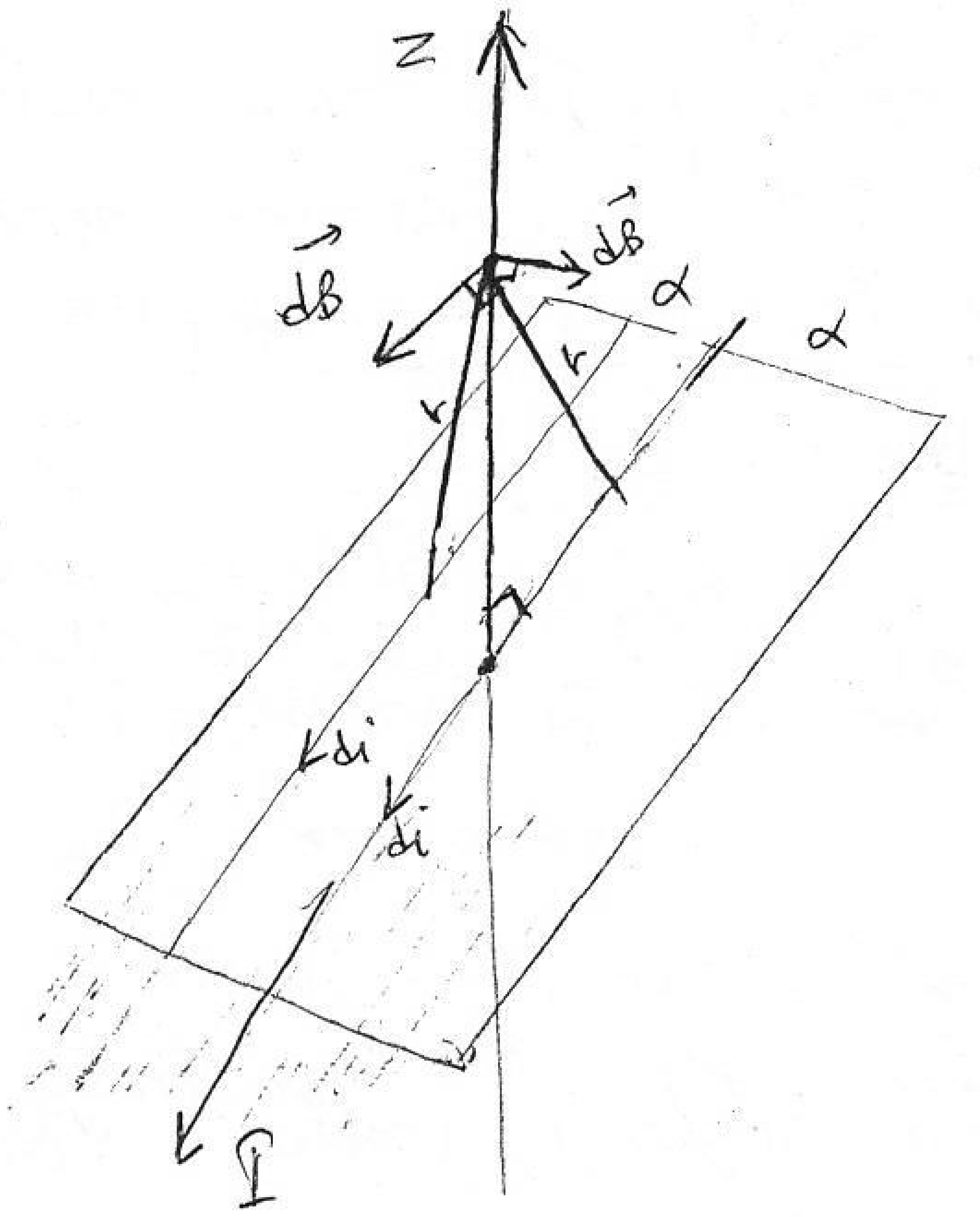
για την άσκηση: $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi \cancel{r^2}}\cancel{r\cdot\theta} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi}\cdot\frac{\theta}{r} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{R_{1,2}}$

$$\Leftrightarrow |\vec{B_{o\lambda.}}| = |B_{B\Gamma} - B_{\Delta A}| = \frac{\mu_0 i}{8}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Φύλλο Cu διαρρέεται από ρεύμα. Ζητείται το μαγνητικό πεδίο σε σημείο που απέχει z από το κέντρο του φύλλου

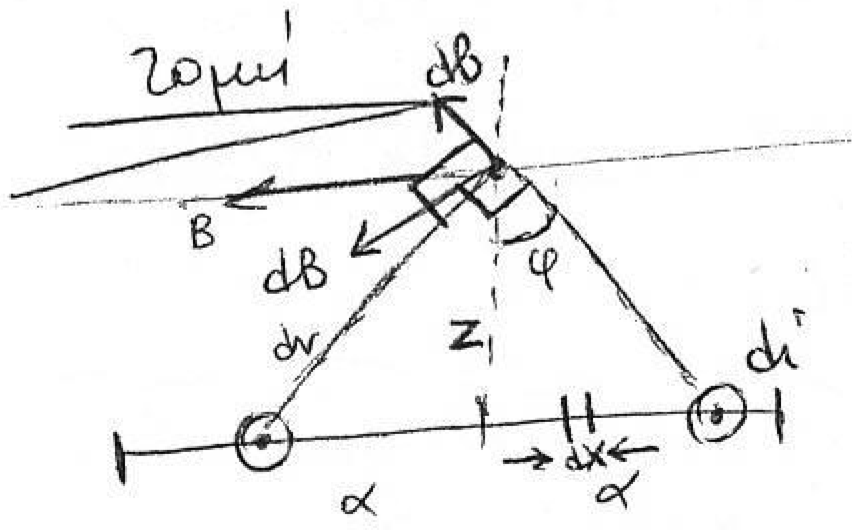


Λύση

Έχω βρει το μαγνητικό πεδίο για σύρμα απείρου μήκους $\left(B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{r}\right)$

Άρα: μπορώ να χωρίσω το φύλλο σε στοιχειώδη λεπτά σύρματα και να πάρω το άθροισμα των μαγνητικών τους πεδίων.

άρα $dB = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{di}{r} \cos\varphi$ ⇝ σε κάθε σύρμα, παίρνω την απόσταση r από το σημείο με απόσταση z μέχρι το σύρμα και μου βγαίνει διαφορετικό διάνυσμα $\vec{dB}$, το οποίο κάθε φορά είναι κάθετο στο r σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Αλληλοαναίρεση κάποιων $\vec{dB}$. Τελικά, το $\vec{B}$ βγαίνει αριστερά.

Έχω

$\frac{I}{2\alpha} = \frac{di}{dx} \Leftrightarrow di = \frac{I}{2\alpha} \cdot dx$, άρα:

από το τρίγωνο

$\cos\varphi = \frac{z}{r}$

$r = (z^2 + x^2)^{1/2}$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\alpha} \int \frac{\cos\varphi \, dx}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{z}{(z^2+x^2)} dx$$

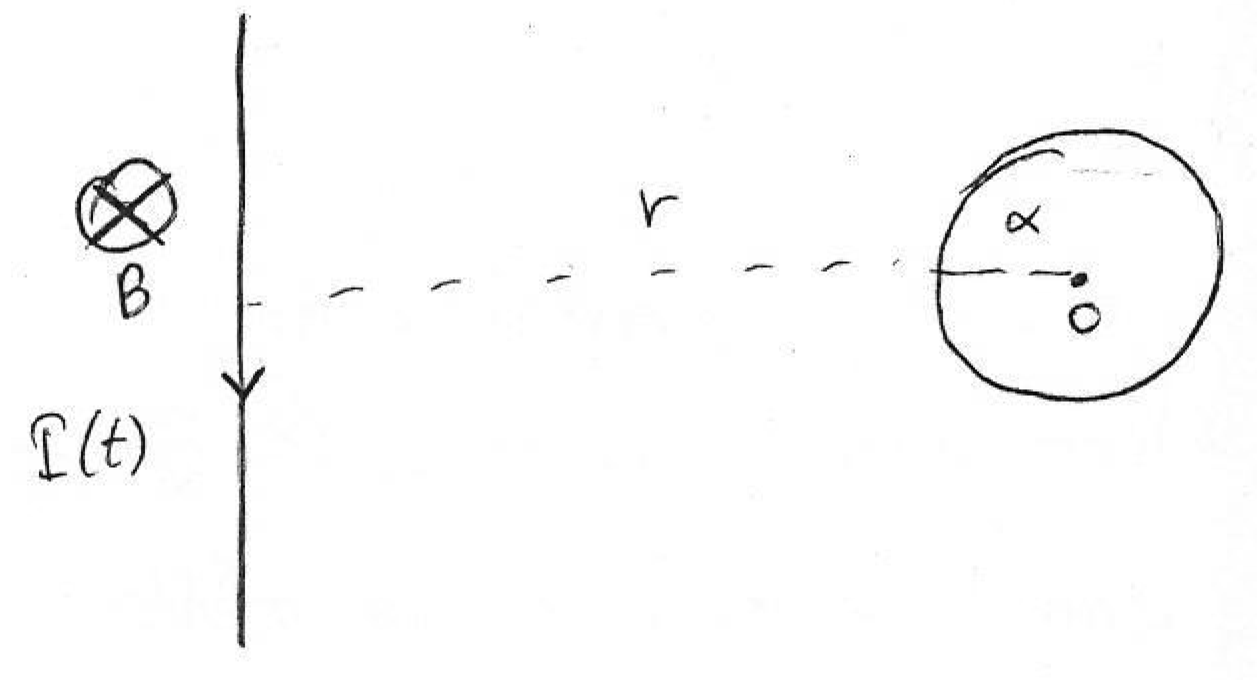
$$\Leftrightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\alpha} \cdot z \left[\frac{1}{z} \arctan\left(\frac{x}{z}\right)\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{\alpha} \cdot \arctan\frac{\alpha}{z}$$ (φορά: ⊗)

2) Αγωγός διαρρέεται από ρεύμα $I(t)$ και σε απόσταση r βρίσκεται κυκλικό σύρμα ακτίνας α και αντίστασης R $(\alpha << r)$.

$I(t) = I_0 - k\cdot t$, $k>0$, $I_0>0$. Ζητείται το B στο κέντρο του ~~κυκλ~~ κυκλικού σύρματος.

Λύση.



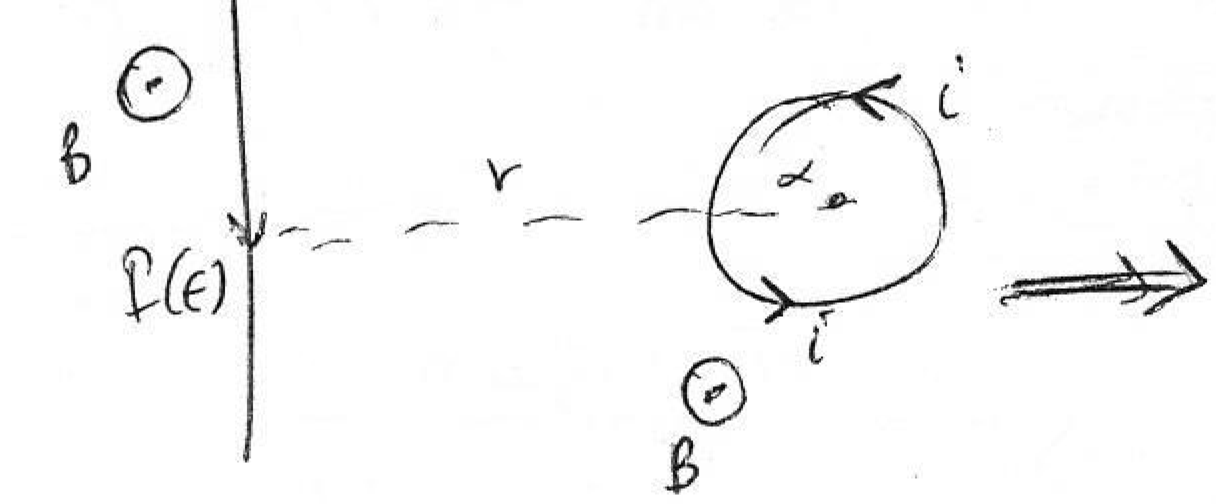
Με κανόνα δεξιού χεριού, προσδιορίζω το B του ευθύγραμμου αγωγού. Το B είναι μεταβαλλόμενο.

$$B_E = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_0 - kt}{r}\right)$$

$$B_K = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot \cancel{iR}/(z^2+R^2)^{3/4} = \frac{\mu_0}{2\alpha}\,\frac{iR^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

Μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργείται από το μεταβαλλόμενο ρεύμα του ευθύγραμμου αγωγού και διαδίδεται στο χώρο, άρα περνά και από το κυκλικό σύρμα, δηλαδή έχουμε μεταβολή μαγνητικής ροής. Αφού όμως έχω $\frac{d\Phi_B}{dt}$ στο κυκλικό σύρμα, θα δημιουργηθεί ~~θα έχω και $\frac{d\Phi_E}{dt}$ (μεταβολή ηλεκτρικής κυκλ ροής)~~ ΗΕΔ σε αυτό, ώστε να αναιρέσει τη μεταβολή.

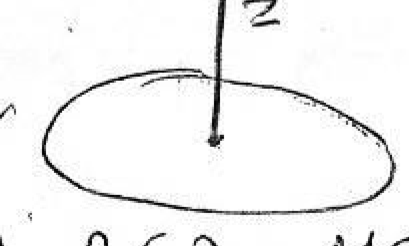
Αφού $I\downarrow$ με το χρόνο, θα έχω και $B\downarrow$, άρα η ΗΕΔ που αναπτύσσεται πρέπει να τείνει να αυξήσει το B, άρα θα πρέπει να δημιουργηθεί τέτοιο ρεύμα, ώστε να έχω $\odot B$.



$$\boxed{\vec{B_0} = \vec{B_E} + \vec{B_K}}$$

B_E: μαγνητικό πεδίο από τον ευθύγραμμο

B_K: μαγνητικό πεδίο από τον κυκλικό



$B(z) = \frac{\mu_0}{2}\,\frac{i\cdot R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}$, Για $\begin{cases} z=0 \\ R=\alpha \end{cases}$ βρίσκω το B_K. $B_K = \frac{\mu_0}{2}\cdot\frac{i\cdot\alpha^2}{\alpha^{2\cdot 3/2}} = \frac{\mu_0\cdot i}{2\alpha}$

$$B_K = \frac{\mu_0\cdot E_{\epsilon\pi\alpha\gamma.}}{2\alpha\cdot R} = \frac{\mu_0}{2}\cdot\frac{\frac{-d\Phi_B}{dt}}{\alpha\cdot R} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{d(\pi\alpha^2 B_{\epsilon\pi.})}{dt}\Big/\alpha R\right) = \frac{\mu_0}{2\alpha R}\pi\alpha^2\cdot\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{k}{r} = \frac{\mu_0^2}{4r\cdot R}\cdot\alpha k$$

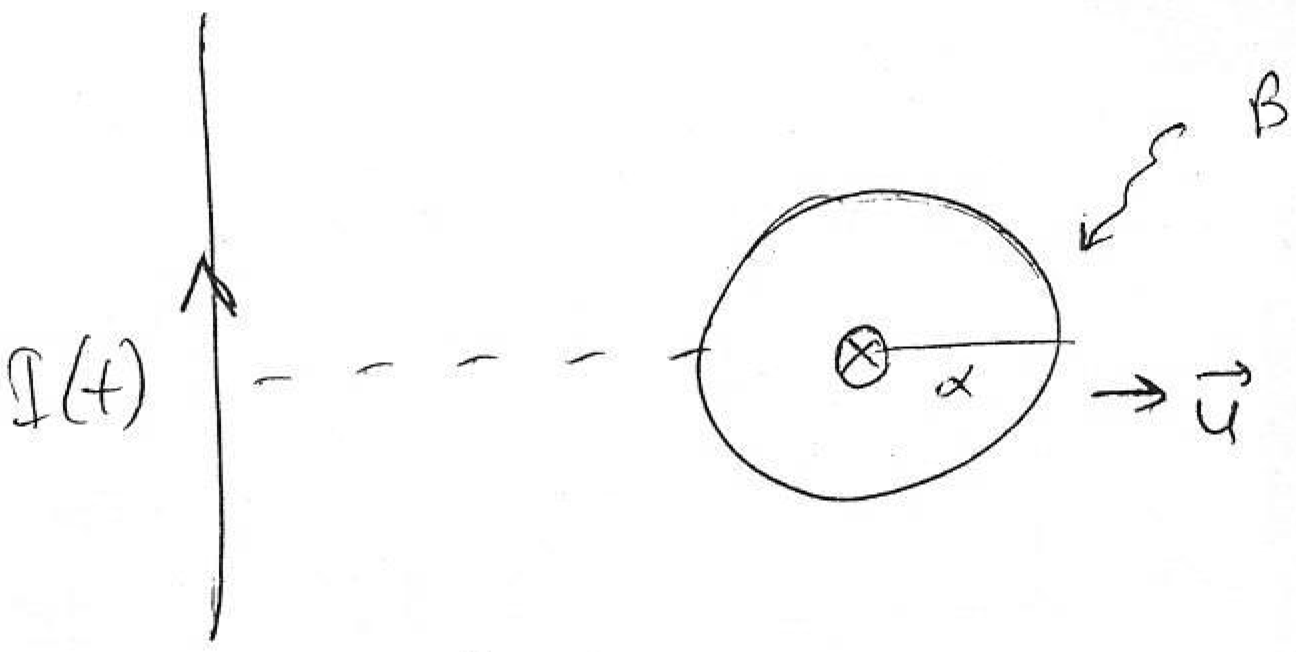
άρα: $B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{(I_0 - kt)}{2} + \frac{\mu_0^2}{4rR}\,\alpha\cdot k$

Να βρεθεί $E_{\epsilon\pi\alpha\gamma}$ όταν ο κυκλικός απομακρύνεται με ταχύτητα υ.

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) ooo από προηγούμενη άσκηση

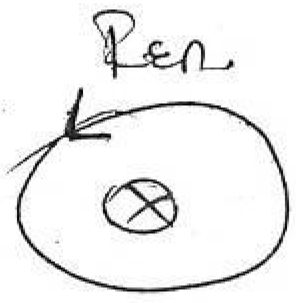


Επειδή r>>α, το B στο βρόχο θεωρείται σταθερό.

Το B ευθύγραμμου αγωγού απείρου μήκους: $B=\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{i}{r}$, άρα:

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I(t)}{r}, \quad \mathcal{E}=\frac{-d\Phi_B}{dt}$$

Αν $I(t)=I_0+kt$, $I_0, k>0$, άρα:

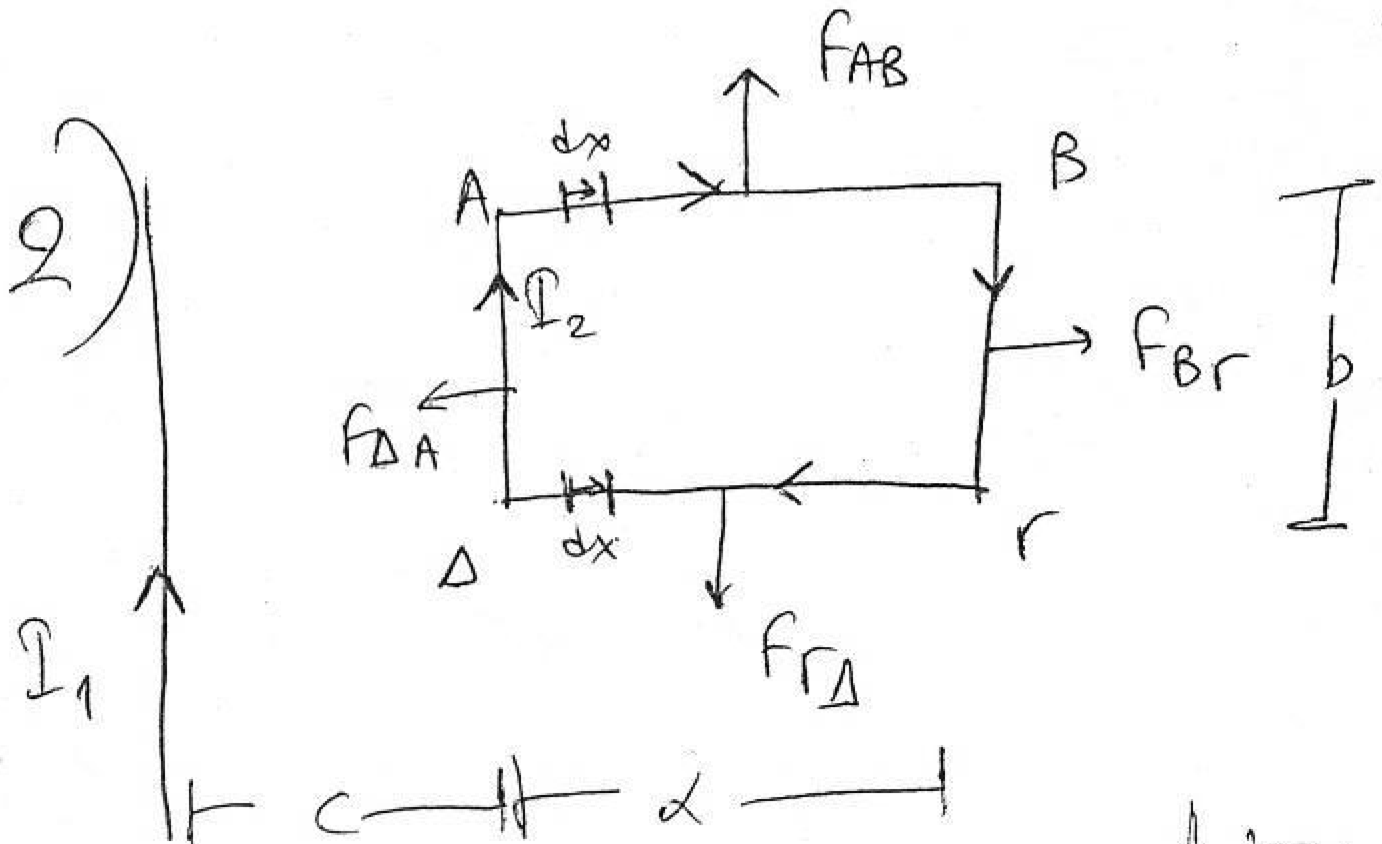


$$\mathcal{E}=-\frac{d(B\pi\alpha^2)}{dt}=-\frac{d\left[\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{(I_0+kt)}{r(t)}\cdot\pi\alpha^2\right]}{dt}$$

r(t) επειδή κινείται με $\vec{u}$.

$i_{επ.}=\mathcal{E}/R$.

2)

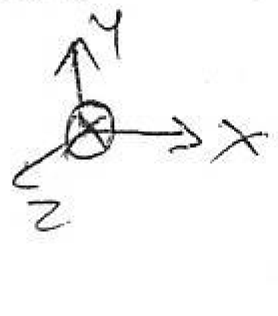


$F_{ολ}=?$

τις δυνάμεις $F_{AB}, F_{B\Gamma}, F_{\Gamma\Delta}, F_{\Delta A}$ τις βρίσκω με κανόνα δεξιού χεριού.

Λύση

τύποι: $F_L=q\vec{v}\times\vec{B}$, $d\vec{F}=I\,d\vec{l}\times\vec{B}$, $B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}(-\hat{z})$



$$F_{\Delta A} = \int_{\Delta}^{A} dF = \int_{\Delta}^{A} i\,dy \times B = \int_{\Delta}^{A} I_2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi c} dy = I_2 \cdot I_1 \frac{\mu_0 \cdot b}{2\pi c}$$

$$F_{B\Gamma} = \ldots = I_2 \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_0 \cdot b}{2\pi(c+\alpha)}$$

$F_{AB} = -F_{\Delta\Gamma}$ $\rightsquigarrow$ επειδή κατά μέτρο είναι ίσες.

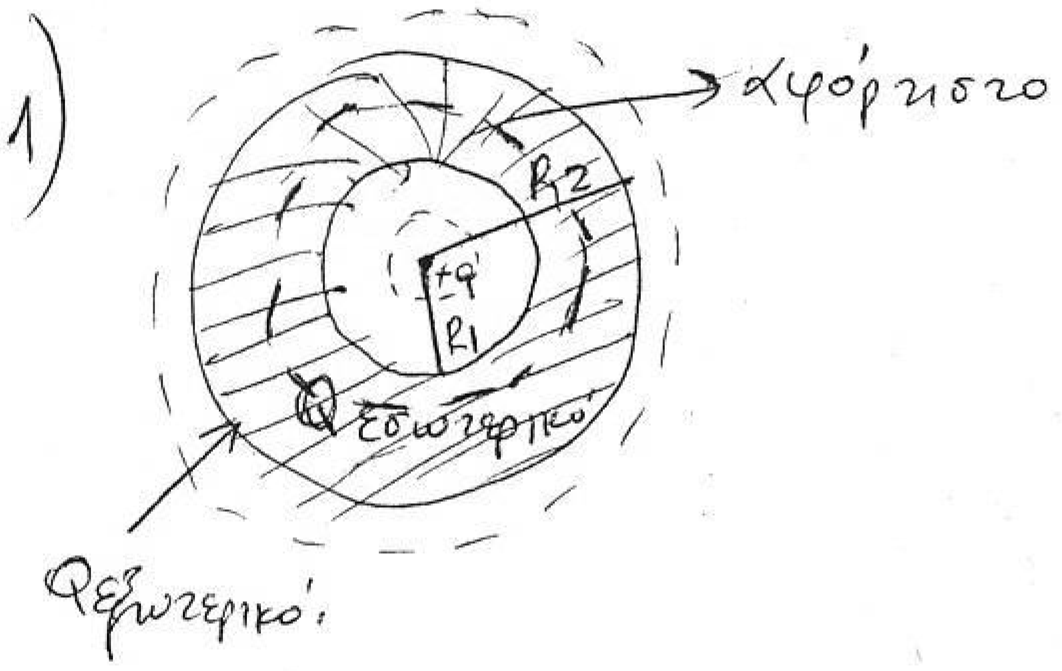
$$F_{AB} = \int_{A}^{B} dF = \int_{A}^{B} I_2 \cdot dx \cdot B \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \int_{A}^{B} I_2 \cdot dx \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \int_{c}^{c+\alpha} \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow F_{AB} = \ldots = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 \cdot I_2 \cdot \ln\left(\frac{c+\alpha}{c}\right).$$

Άρα $\vec{F_{o\lambda}} = \cancel{\vec{F_{AB}}} + \vec{F_{B\Gamma}} + \cancel{\vec{F_{\Gamma\Delta}}} + \vec{F_{\Delta A}} = F_{B\Gamma} - F_{\Delta A}.$

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) 

Σφαιρικό κέλυφος με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2. Τοποθετείται φορτίο Q στο εσωτερικό του. Το κέλυφος είναι αγώγιμο. Να βρεθεί το Q επαγόμενο (Αρχικά, το κέλυφος είναι ουδέτερο).

Λύση

με Gauss

1) Η συμμετρία είναι σφαιρική, αφού το πεδίο είναι ακτινικό.

2) Ως κλειστή επιφάνεια παίρνω μία σφαίρα γύρω από το Q.

• $r<R_1$

$$\oint E ds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_0 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}}$$

• $R_1<r<R_2$

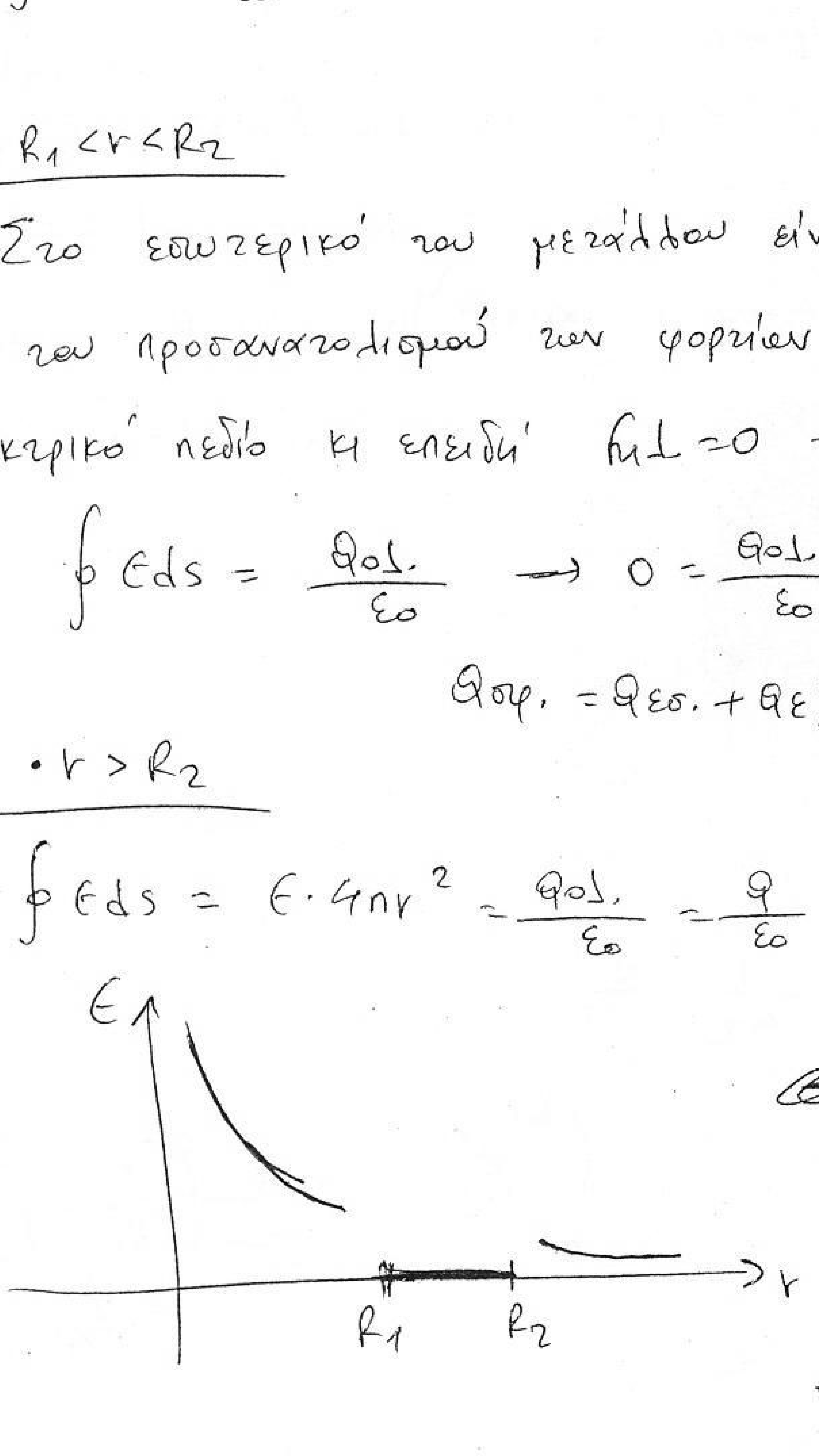
Στο εσωτερικό του μετάλλου είναι $E_{ολ}=0$ (ισχύει στο εσωτερικό κάθε αγωγού!). Λόγω του προσανατολισμού των φορτίων στο σφαιρικό κέλυφος, δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο κι επειδή $E_{ολ}=0 \Rightarrow E=0$.

$$\oint E ds = \frac{Q_{ολ}}{\varepsilon_0} \rightarrow 0 = \frac{Q_{ολ}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow Q_{ολ}=0, \Rightarrow \boxed{Q_{εσ.} = -Q}$$

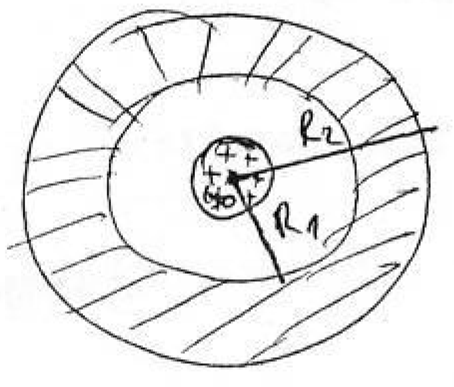
$$Q_{σφ.} = Q_{εσ.} + Q_{εξ.} = 0 \Leftrightarrow Q_{εξ} = -Q_{εσ.} = Q$$

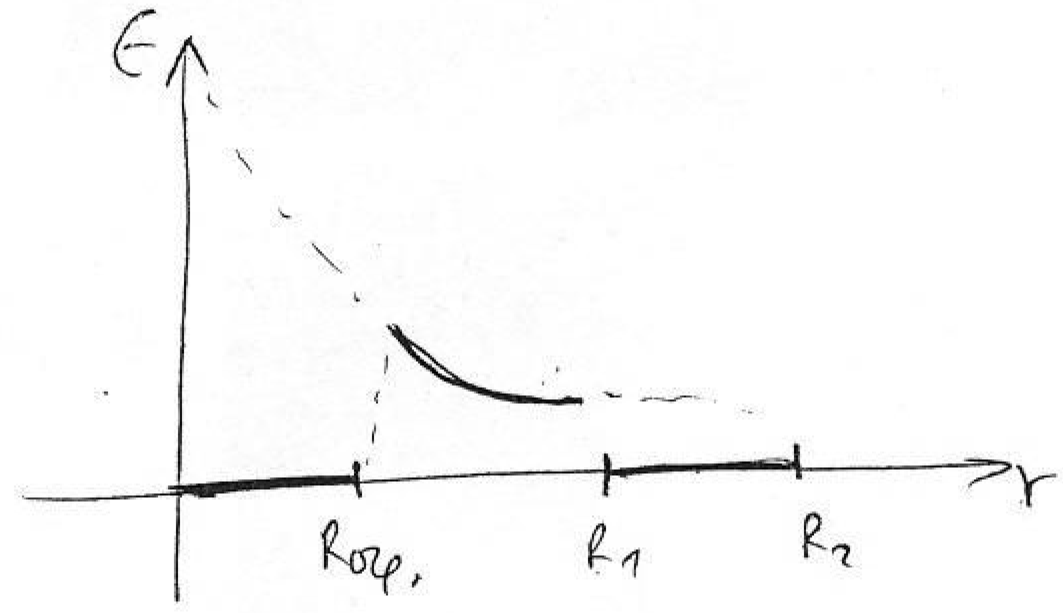
• $r>R_2$

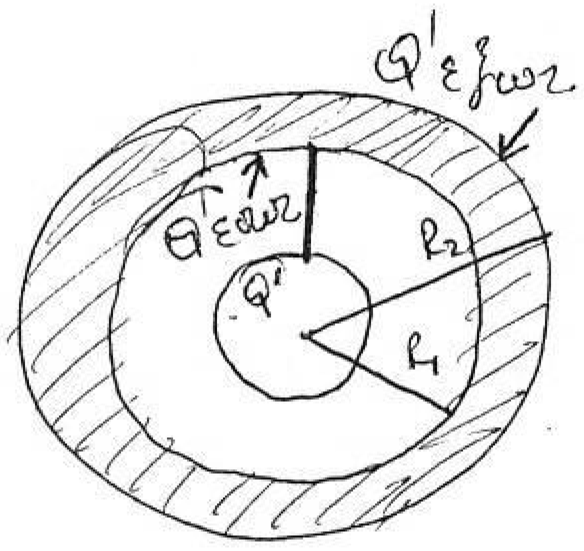
$$\oint E ds = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{ολ.}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}}$$



2) ooo όπως η προηγούμενη άσκηση με τη διαφορά ότι αντί για Q έχω μία αγώγιμη σφαίρα | Λύση Μέσα στη σφαίρα (είτε έχει Q είτε όχι) είναι $F=0 \Rightarrow E=0$.
Όλα τα άλλα ίδια με την προηγούμενη άσκηση

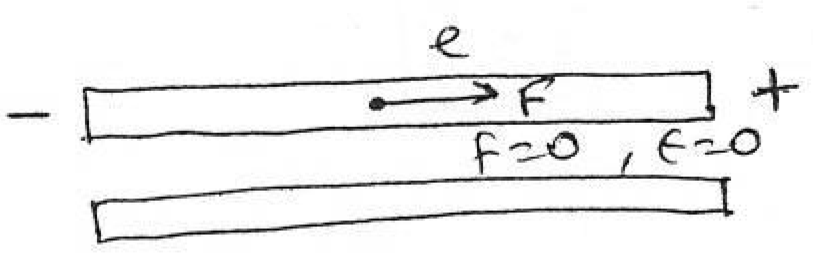




3) 

ooo όπως η προηγούμενη άσκηση με τη διαφορά ότι ενώνονται οι δύο σφαίρες με ένα σύρμα αγώγιμο.

Λύση



Μέσω του σύρματος, θα διαφύγουν e^- και θα αλλάζει η κατανομή του φορτίου, επομένως θα έχω Q', $Q'_{έσω}$, $Q'_{έξω}$, $\Sigma q = Q$. Όταν επέλθει ισορροπία (δηλαδή τα e^- είναι ακίνητα), τότε τα e^- που βρίσκονται στο σύρμα θα παραμείνουν σε αυτό διότι η F στο εσωτερικό του σύρματος θα είναι μηδέν. Τότε στα άκρα του σύρματος θα είναι
(*) $\Delta V = 0 \Rightarrow V_{σφ.} = 0 \Rightarrow V_{σφ.φλοιού} = 0$ άρα $V_{ολ.} = 0$.

Άρα: $F = 0 \rightarrow E = -\dfrac{\Delta V}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$ (*)

• $R < r < R_1$

$$\oint E' ds = \frac{Q'}{\varepsilon_0} \rightarrow E' 4\pi r^2 = \frac{Q'}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{r^2}$$

$$V_{σφ.} \rightarrow V_{φλοιού} \rightarrow \int_{V_{σφ.}}^{V_{φλ.}} dV = -\int_R^{R_1} E' dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{R_1}\frac{Q'}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right] = 0$$

$\Leftrightarrow \boxed{Q' = 0}$

$V_{ολ.} = 0$.

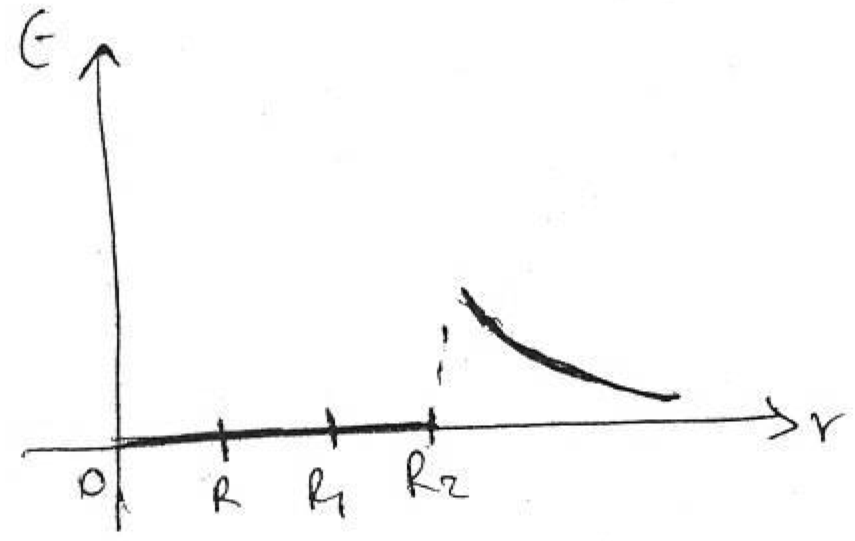
Άρα, όλο το φορτίο θα συγκεντρωθεί στην έξω σφαίρα.

$$\oint_{εσωτ} \vec{E}' ds = \frac{Q'_{ολ}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow 0 = \frac{Q'_{ολ}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow 0 = \frac{Q' + Q'_{εσωτ}}{\varepsilon_0} \overset{Q'=0}{\Leftrightarrow} \boxed{Q'_{εσωτ.} = 0}$$

• $r > R_2$

$$\oint_{εξωτ} \vec{E}' ds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E'_{εξωτ} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E'_{εξωτ.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow Q_{ολ} = Q \Rightarrow \cancel{Q}^{0} + \cancel{Q'_{εσωτ}}^{0} + Q'_{εξωτ} = Q \Leftrightarrow \boxed{Q'_{εξωτ} = Q}$$



• $r < R$

$E = 0 \Rightarrow \Delta V = 0 \Rightarrow V = σταθ.$